مع أسس الفيزياء الكلاسيكية

أ- الميكانيك: المادة مؤلفة من جسيمات نقطية وهذه الجسيمات تتحرك تحت تأثير قوى التفاعل المتبادل (التأثير المتبادل) حسب قانون نيوتن (وقوانين نيوتن) وأهمها

(القوة = الكتلة × التسارع) $F = ma$

ويتم بواسطة الميكانيك وصف الحركة الظاهرية للاجسام) المعادلة بصورة عامة، كما أن النقطة الأساسية لبنية المادة تتعامل بدلالة جسيمات ذات كتل محددة وحركة الجسيم الحر يمكن تعريف بدلالة الطاقة E والزخم p.

ب- النظرية الكهرومغناطيسية: الظواهر المغناطيسية والكهربائية توصف بدلالة مجالين أحدهما كهربائي $\varepsilon(x)$ والآخر مغناطيسي $H(x)$. وهذا المجالان مرتبطان بالشحنة والتيار بواسطة معادلات ماكسويل، أما في الفراغ فهما يحققان المعادلتين التاليتين

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \begin{matrix} \varepsilon(x) \\ H(x) \end{matrix} = 0 .$$

وهذا يعني أن المجالات تنتشر في الفضاء على شكل موجات بسرعة ثابتة C.

ولعل أبسط أنواع الموجات هو ما يعرف بالموجات المستوية

$$V(x,t) = A \exp[-i(\omega t - K_x)]$$

حيث ω هو التردد الزاوي و K متجه الانتشار، وهاتان الصفتان الفيزيائيتان الأساسيتان للموجات مرتبطتان بالعلاقة التالية $\omega = |K| c$.

وعليه فالتداخل بين الاجسام (المادة) والموجات (الإشعاع) يتم من خلال ما يعرف بقانون لورنس الذي يعطي قيمة القوة المسلطة على جسيم مشحون e يتحرك في مجال كهرومغناطيسي بسرعة v يعطى بالعلاقة التالية.

$$\vec{F}(x) = e[\vec{\varepsilon}(x) + \vec{v} \times \vec{B}(x)$$

جـ- الثرموديناميك وافتراض ماكسويل.

لنتأمل متذبذباً توافقياً بسيطاً. الطاقة الكلية للمتذبذب هي:

$$E(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$$

من المعلوم أنه لكل متذبذب نمطاً للتذبذب بتردد معين له. ولنفترض أنه لدينا عدداً كبيراً من هذه المتذبذبات تتراوح تردداتها على مدى واسع جداً بطاقة E ضمن المدى $(0, +\infty)$.

فلإيجاد معدل طاقة المتذبذب لهذه المجموعة الكبيرة E لا بد من استخدام دالة الاحتمال لماكسويل $e^{-E/KT}$ وهي عبارة عن احتمال حدوث نمط تذبذب بطاقة E ضمن المجال E و $E + dE$ وهي عبارة عن

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{KT}} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{KT}} dE} = KT$$

[illegible]

[illegible]

$$p = -\alpha q$$

[illegible] (α [illegible])

[illegible] $F = ma$ [illegible]

$$ma = -\alpha q \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha x = 0 \Rightarrow$$ (q [illegible] x).

(1) $$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x = 0$$

[illegible] $\cos\omega t$ ، $A\sin\omega t$ [illegible]

[illegible] (2). $$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

وبمقارنة المعادلة مع (1) نجد أن $\omega^2 = \frac{\alpha}{m}$ ومنه $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

[illegible] (1) [illegible].

(3) $$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

وبالتالي يكون الزخم

(4) $$p = m\omega A\cos(\omega t + \alpha)$$

وأن $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 2\pi\nu$

ولإيجاد مسار حركة نقطة التمثيل في الفراغ الطوري نربع المعادلتين (3) و(4) ثم نجمعهما فنحصل على

(5) $$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{m\omega A}\right)^2 = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص [illegible] أي أن مسار نقطة التمثيل في الفراغ الطوري عند اهتزاز الهزاز حول النقطة (o,x) [illegible] القطع الناقص [illegible] $a = A$ و $b = m\omega A$.

وأن مساحة القطع الناقص هي

(6) $$S = \oint p\,dq = \pi ab = \pi m\omega A^2$$

وبالتالي فإن طاقة الهزاز هي:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\alpha x^2 = \frac{\alpha}{2}A^2$$ (من العلاقة $K = \alpha$)

لاحظ من المعادلة (5) فإن

$$q^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} = A^2 \Rightarrow$$

$$q^2 + \frac{p^2}{m^2\frac{\alpha}{m}} = A^2 \Rightarrow q^2 + \frac{p^2}{m\alpha} = A^2$$ [illegible]

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{k}{2}A^2$$

وبما أن مساحة القطع الناقص تساوي (6)

$$E = \frac{Sk}{2\pi m\omega} = \nu \oint p\,dq$$

(أي أنه تم تكميم الطاقة)

③ على الشكل $E = \frac{k}{2}A^2$

$$E = \frac{k}{2}\left(\frac{S}{\pi m\omega}\right) = \frac{\alpha \oint p\,dq}{2\pi m\omega} = \frac{m\omega^2 \oint p\,dq}{2\pi m\omega} =$$

$$E = \frac{\omega \oint p\,dq}{2\pi} = \nu \oint p.dq$$

الطبيعة الاحصائية :

لنفهم جوهر الطريقة الاحصائية نورد المثال البسيط التالي :
لنفترض أن لدينا غاز مؤلف من N جسيم (جزيء) المتبادلة التأثير فيما بينها والتي تخضع لقوانين
ميكانيك نيوتن عندئذ معادلة الحركة لكل جزيء هي : $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{k} \vec{F}_{ik}$

حيث v_i هو سرعة الجزيء رقم i و F_{ik} هي قوة التأثير المتبادل بين الجزيئين i و k
وهذا يتطلب دراسة قوانين الحركة لكل جزيء على حده وحل جملة المعادلات التفاضلية الموصوفة لمعادلة
الحركة وهذا غاية في الصعوبة لأننا لا نعلم أيضاً في $1cm^3$ من الغاز وفي الشروط النظامية
يوجد $2,7 \times 10^{19}$ جزيء وهذا يعطي 10^{20} معادلة . وحتى لو حللنا جملة هذه المعادلات فإنه لا يعطي
معلومات متعلقة بخصائص الغاز ككل لأن خصائص الجملة ككل لا ترتبط بخصائص كل جزيء
على حدة وإنما ترتبط بخصائص وسطية للجزيئات ككل ومن هنا كانت الطريقة المعروفة باسم الطريقة
ذات الطابع الاحصائي الاحتمالي .

إن ما تقودنا دراسة الطبيعة الاحصائية إليه إمكانية تفسير الصفات الماكروسكوبية للجملة
بالاعتماد على صفات الجزيئات المؤلفة للجملة وهذا يقودنا إلى التفسير الصحيح للصفات الفيزيائية
والكيميائية وتفسير العمليات الماكروسكوبية الجارية في ضوء التصورات الجزيئية الحركية . وهكذا
فإن القوانين الاحصائية تعطي إمكانية تحديد القيم المتوسطة للمقادير والحالات الممكنة .
ونضيف هنا بأن الفيزياء الاحصائية ترتبط مع الترموديناميك بشكل واسع فعلى أساس التوازن
تتطابق القوانين الاحصائية للجمل الماكروسكوبية مع قوانين الترموديناميك ويمكننا أن نسمي
الفيزياء الاحصائية للجمل المتوازنة تسمية الترموديناميك الاحصائي .

... حيث يشمل التركيب الداخلي للجزيئات

الفراغ الطوري

التي تصف التوزيع الإحصائي للفضاء المثالي العادي الذي ... الفراغ الطوري المكون من سته ابعاد ثلاث منها

ونعتبرها نقاطاً مادية اخذ من ما يسمى الفراغ الطوري ... وثلاث أخرى للدفع (p_x, p_y, p_z).

للموضع أو الاحداثي (x,y,z) ونعبر عنها بالاحداثي المعمم (q_i)

ونعبر عنها بالدفع المعمم (p_i) حيث $(i=1,2,\dots 3N)$.

من وجهة النظر الفيزيائية التقليدية تتوافق حالة كل جسيم نقطة في الفراغ الطوري وعندما تكون الجملة مكونة من N جسيم فإن ذلك يعني أنه لدينا عدد من النقاط المادية عددها N. وبالتالي ستوضع على المحاور الاحداثية الديكارتية الاحداثيات المعممة والدفوع المعممة لجميع جسيمات الجملة وتكون لكل نقطة في الفراغ الطوري $6N$ احداثي (q_i, p_i) وتبين الحالة الميكروسكوبية المحددة للجملة ككل. ويسمى الطريق الذي تسلكه النقطة الطورية مساراً طورياً، وإن كثافة النقاط في هذا الفراغ تسمى كثافة النقطة الطورية $\rho(q,p)$. وإن احداثيات النقاط الطورية (q_i, p_i) يمكن أن تتغير مع مرور الزمن أي

$$q_i = q_i(t) \qquad p_i = p_i(t)$$

وهي تعد من حلول لمعادلة هاملتون $H=E(q_i,p_i)$ حسب:

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad و \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2\dots 3N)$$

- نرمز إلى الحجم الطوري بـ $d\Gamma = dq_1\, dq_2 \dots dq_{3N} \,.\, dp_1\, dp_2 \dots dp_{3N}$

أو بالشكل المختصر $d\Gamma = dq.dp$

أو $d\Gamma = \prod_{i=1}^{N}(dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z)_i$

ويمكن كتابة عنصر الحجم $(dxdydz)$ بـ dr أو dV وبالتالي:

$$d\Gamma = dr.dp$$

وبالتالي يمكن اعتبار الفضاء الطوري فضائين جزئيين، فضاء الدفع وفضاء المواضع حيث ستوضع الدفع المعمم على $3N$ محور احداثي دفعي وستوضع الاحداثيات المعممة على $3N$ احداثي موضعي. وأحياناً يجزأ الفضاء الطوري إلى N فضاء جزئي والذي يطابق كل جسيم على حدة وهو يمثل N فضاء سداسي الابعاد.

- يعطى الحجم g للفضاء الطوري لجسيم واحدة تتحرك بحرية في الحجم V للفضاء العادي بطاقة محصورة في المجال $[0, \varepsilon_0]$ بالعلاقة التالية:

$$g = \int_V dx\,dy\,dz \int_p dp_x\, dp_y\, dp_z = V \int_p dp_x\, dp_y\, dp_z .$$

طاقة الجزيئ للجسيمات $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ حيث $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ و $0 \le p \le p_0$ وان $p_0 = \sqrt{2m\varepsilon_0}$

وعدد هذه كل الحالات المايكروسكوبية المسموح بها للجسيمات تشغل في الفضاء الزخمي كرة نصف قطرها p_0 ويعطى حجمها ب $\int dp_x dp_y dp_z = \frac{4}{3}\pi p_0^3$ وبالتالي

$$g = \frac{4\pi}{3} V (2m\varepsilon_0)^{3/2} , \quad dg = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 4\pi m V \sqrt{2m\varepsilon}\, d\varepsilon$$

حيث dg هو الحجم الطوري الصغري الذي يمثل كل الحالات المايكروسكوبية للجسيمات في المجال الطاقي $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$.

- الطبقة والخلية :

للحصول على التعبير الاحصائي للغاز نعمد الى تقسيم الفراغ الطوري الى ما يسمى طبقات وخلايا وذلك لكون دالة التوزيع لا تتعلق بالاحداثيات (q_i, p_i) فقط وانما تتعلق بطاقة هذه الجسيمات (المرتبطة بدورها بالاحداثيات)

$$E = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + U(x,y,z)$$

وبالتالي يتم التقسيم وذلك بواسطة تحديد سطوح مستويات الطاقة في الفراغ الطوري مع الأخذ بعين الاعتبار بعض الملاحظات .

١- أن تكون الطبقات المقسمة للفراغ الطوري رقيقة الى حد تمكننا معه أن نعطي النقاط المحصورة في نطاق الطبقة بدقة كافية قيماً متساوية للطاقة ، ومن جهة أخرى يجب أن تكون مقاييس الطبقة كبيرة جداً الى حد يكون معه عدد النقاط فيها N_i كبيراً بالمقارنة مع الواحد $(N_i \gg 1)$ وهذا يؤدي حتماً الى عدم تساوي الطبقات بالسماكة حسب قيم الطاقة الكبيرة والصغيرة بالنسبة للطبقات وذلك لكي تحتوي هذه الطبقات اعداداً كبيرة من النقاط الطورية.

٢- هو تساوي الخلايا بحيث ينظر الى كل الحالات على أنها تملك نفس الاحتمال . وبالتالي نقسم الفراغ الطوري الى خلايا متساوية الحجم كل منها يساوي (a) وتحتوي كل طبقة على عدد كبير جداً من الخلايا g_i حيث يجب ان يكون $g_i \gg 1$ بالاضافة الى احتوائها على عدد كبير جداً من النقاط الطورية $N_i \gg 1$ وتحقق سماكة الطبقة العلاقة التالية $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ll \varepsilon_i$.

- مبدأ بولتزمان

وهو أحد المبادئ الاساسية التي ترتكز عليها الدراسة الاحصائية للحل المتوازنة ، حيث أن حالة التوازن الترموديناميكي تقابل في الاطار الاحصائي مفهوم التوزيع الاكثر احتمالا وهو يوافق العدد الأعظمي للحالات المايكروسكوبية المختلفة التي يمكن ان تحقق الحجم من أجل توزيع معين للطاقة ، وهذا العدد يساوي عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها أن

و … في حالات … الحراري الطوري (أو ماسي طبقات الطاقة وما سبب الحرارة) ، حيث
… السعات (النقاط الطورية) في الطاقة الداخلية (دالة الطاقة الحرة) تامًا
… عند طرف التوزيع المختلفة للاحتمال الثرموديناميكي ويرمز له بالرمز W أحيانًا أو Ω .
في حالة التوازن الثرموديناميكي يكون W العدد من ناحية النظرة وإن أعظم قيمة ممكنة له
هي الواحد $(W = 1)$.

إن المعنى الحصري له يعني تقلص عدد الحالات المايكروسكوبية إلى حالة واحدة ويتم الوصول
إلى … الجملة أقصى درجات الانتظام) ، وهذا من وجهة النظر الحرارية يمكن الوصول إليه
عندما تنتهي درجة حرارة الجملة إلى الصفر $T \to 0$. وبالطبع فإن الاحتمال الثرموديناميكي
يختلف عن مفهوم الاحتمال العادي المعروف لدينا .

علينا أن نكتب إذًا الاحتمال الثرموديناميكي على أنه عدد الحالات الميكروسكوبية الممكنة .

$$W = \Omega \gg 1 .$$

ويسمى Ω أيضًا الوزن الإحصائي للحالة الماكروسكوبية .

إن المعنى الحصري للاحتمال الثرموديناميكي $(W = 1)$ يدل على أن عدد الحالات الميكروسكوبية
يتقلص إلى الواحد ويحصل هذا عندما تنتهي درجة الحرارة إلى الصفر المطلق $T \to 0$.
ومن جهة أخرى تشير الدراسات الثرموديناميكية إلى أن أنتروبية الجملة تصل إلى القيمة العظمى
في حالة التوازن وعندما تنتهي درجة الحرارة للجملة إلى الصفر تنتهي أنتروبيتها (تتناقص) إلى
الصفر حسب المبدأ الثالث في الثرموديناميك . $S \to 0$ عندما $T \to 0$

وهناك رابطة وثيقة بين الأنتروبية والاحتمال الثرموديناميكي كما بين بولتزمان .

(مبدأ بولتزمان) $$S = k \ln W$$ k ثابت بولتزمان

في حالة التوازن الثرموديناميكي يكون $(S = S_{max})$ و $(W = W_{max})$ وعندما تنتهي $T \to 0$
فإن $W \to 1$ و $S \to 0$ وهذا يتوافق مع مبدأ بولتزمان

حركة الجسيم في صندوق كوانتي

لنفرض ان لدينا جسيم حر كتلته (m) ضمن صندوق كوانتي ذات بعد واحد وبعد ابعاده وطوله a والجسيم تتحرك داخل الصندوق الكوانتي ($0 \leq X \leq a$) وان الطاقة الكامنة معدومة عدا حدي الصندوق ($X=0$ و $X=a$) وهذه الجسيمة تخضع لقوة لا متناهية في الكبر تجبرها على العودة الى داخل الصندوق وحسب ميكانيك الكم فان طاقة هذه الجسيمة وزخمها تأخذ سلسلة من القيم المنفصلة هي

$$P_n = \frac{nh}{2a} \qquad \varepsilon_n = \frac{P_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

حيث h ـ ثابت بلانك ($h = 6.62 \times 10^{-27}$ ergs) و n عدد كمي ($n = 1, 2, \ldots$)

وبعبارة الطاقة فان مستويات الطاقة تأخذ سلسلة من القيم المتقطعة ويكون البعد بين مستويين طاقيين متتاليين مساوياً .

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{h^2}{8ma^2}(2n+1)$$

وهي تتناسب عكسياً مع كتلة الجسيم وعرض مجال الحركة .

وان البعد النسبي بين مستويين طاقيين متتاليين هو

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

وعندما $n >> 1$ فان البعد النسبي هو

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \simeq \frac{2}{n}$$

ويكون لدينا مستويات منفصلة عندما تكون الكتلة صغيرة وعندما تتم الحركة في مجالات ابعادها صغيرة وعندما يكون العدد الكمي n صغيراً . ومن خلال ذلك يعتبر الميكانيك التقليدي عبارة عن حالة حدية يتحول اليها ميكانيك الكم عند اهمال الحدود المتناسبة مع ثابت بلانك h .

لنفترض اننا نستطيع استخدام معطيات الميكانيك التقليدي وبالتالي تكون الجسيمة في الحفرة الكوانتية عبارة عن نقطة مادية تتحرك بين جدارين عاكسين (الشكل) .

مستوى الحالات المنفصلة وحسب ميكانيك الكم موضحاً بالعلاقة $P_n = \frac{nh}{2a}$

حيث ان الحالات الممكنة هي الحالات التي تبعد احداها عن الأخرى بعداً معيناً والخط الغامق يمثل الحالة n بينما الخط المتقطع يمثل الحالة $n-1$

وان عدد الحالات الكوانتية الممكنة والتي تقع بين | $P_n = \frac{nh}{2a}$ و $P = \frac{h}{2a}$ | هو n

اما المساحة (S_n) التي تشغلها هذه الحالات فهي تساوي

$$S_n = \oint p \cdot dX = 2P_n a = hn$$

ويعتمد التكامل $\oint P\,dx$ الذي يشمل دورة كاملة للحركة

$$\oint P\,dx = \int_{-a}^{a} P\,dx - \int_{a}^{-a} P\,dx = 2\int P\,dx$$

فإذا أخذنا جميع الحالات الأخرى الممكنة ووصفناها على الشكل خطوط مغلقة من الخط الأول ذات مساحة تساوي h لوجدنا ان السطح ينقسم بها جميعاً الى حلقات متساوية المساحة وكل حلقة

ان المحورين اللذين المذكورين (n) و (n-1) على المحور P تساوي

$$\frac{hn}{2a} - \frac{(n-1)h}{2a} = \frac{h}{2a}$$

وبالتالي فإن مساحة الحلقة المحصورة في الشكل تساوي

$$2 \cdot a \cdot \frac{h}{2a} = h.$$

وهذا يدل على ان هناك حالة ممكنة تقابل في التقريب شبه الكلاسيكي خلية مساحتها في فضاء الطور h وتدعى الحالات التي تحقق هذا الشرط $\oint P\,dx = nh$ بالحالات المستقرة وهو مبدأ بور

مبادئ اساسية في نظرية الاحتمالات :

نسمي احتمال وقوع حدث ما بأنه النسبة بين عدد الحالات المطلوبة وعدد الحالات الكلية $P = \frac{n}{N}$

P = احتمال وقوع الحادثة، n = عدد الحالات المطلوبة . N عدد الحالات الكلية

وان عدم احتمال وقوع الحدث يساوي النسبة بين عدد الحالات غير المطلوبة وعدد الحالات الكلية $P = \frac{N-n}{N}$

فمثلاً اذا رسمنا سهماً على دريئة كبيرة تحتوي على دائرة مركزية فيكون احتمال وقوع السهم او وصوله الى الدائرة المركزية للدريئة هو نسبة مساحة الدائرة المركزية الى المساحة الكلية للدريئة

فإذا كانت $P(x)$ تعبر عن احتمال وجود جسيم في الموضع (x) فإن احتمال ايجاد الجسيم في المجال $X = A$ و $X = B$ يساوي $\int_{A}^{B} P(x)\,dx$ حيث dx مجال متغير صغير . وبالتالي نحصل على الاحتمال من خلال التكامل على المجال المعطى .

نسمي النسبة بين عدد الحالات المطلوبة وعدد الحالات الكلية بالتواتر النسبي عندما يتكرر الحدث عدداً كبيراً من المرات . ونسمي الاحتمال الاحصائي (التجريبي) بأنه نهاية التواتر النسبي عندما تتكرر التجربة عدداً كبيراً من المرات .

$$W_i = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N}$$

W_i الاحتمال الاحصائي - n_i عدد الحالات المطلوبة - N عدد الحالات الكلية .

وعندما تكون المقادير العشوائية تابعة للزمن فإن الاحتمال

$$W_i = \lim \frac{\Delta t}{t}$$

Δt - زمن وقوع الحادثة و t - الزمن الكلي .

تقسم المقادير العشوائية الى :

١- مقادير غير مستمرة : هي المقدار المدروس يأخذ قيماً محددة مثل النرد (1,2,3,4,5,6)
فاذا فرضنا ان ($x_1, x_2, \dots, x_n$) هي القيم التي يأخذها المقدار العشوائي غير المستمر فان الاحتمالات الموافقة لهذه القيم هي ($w_1, w_2, \dots, w_n$) فان مجموع الاحتمالات يكون

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

٢- مقادير مستمرة: المقدار المستمر هو المقدار الذي يأخذ قيماً متقاربة صحيحة او كسرية وهو متغير بشكل مستمر بحيث يكون لدينا $\int dw = 1$

ويمكن التعبير عن الاحتمال (dw) عن طريق تابع التوزيع الاحتمالي $f(x)$ والذي يبين كيفية توزيع الاحتمالات على الحالات dx عند تغيرها X. أي ($\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 1$).

خصائص الاحتمالات.

من تعريف الاحتمال نجد أن $1 \ge w \ge 0$ وذلك بسبب كون $0 \le n_i \le N$ وبالتالي فان الاحتمال لا يمكن أن يكون سالباً. وعندما يكون $w = 1$ فان وقوع الحدث يكون متأكداً وعندما $w = 0$ فان وقوع الحادثة مستحيل.

يستفاد احتمال حدوث حادثة مركبة في كثير من الاحيان عن طريق معرفة احتمال كل حادثة على حدة معرفاً لطبيعة الحوادث، لدينا فرضيتان عامتان هي فرضية جمع الاحتمالات وفرضية جداء الاحتمالات

اولاً فرضية جمع الاحتمالات.

ليكن لدينا حادثة مركبة تتلخص في وقوع الحادثة A أو الحادثة B واللتين بدورهما تعتبران حادثتين متنافيتين (غير متقاطعتين) أي أن حدوث احدهما ينفي حدوث الأخرى (وهي العكس) وحسب قانون تعريف الاحتمال نكتب الاحتمال للحادثة المركبة على النحو التالي.

(احتمال حدوث الحادثة A أو B) $w(A \cup B) = \lim \frac{n_A + n_B}{N}$ = (عدد مرات وقوع A + عدد مرات وقوع B) / عدد المرات N

لذا يمكن التعبير عن العلاقة السابقة بشكل منفصل

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N} = w(A) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{n_B}{N} = w(B)$$

أي أن احتمال حدوث الحادثة المركبة يعبر عنه بمجموع احتمالات كل حادثة على حدة.

$$w(A \cup B) = w(A) + w(B)$$

ثانياً فرضية جداء الاحتمالات

لنفرض لدينا حادثتين A, B ولنفرض أن $w_A(B)$ هي احتمال حدوث الحادثة B بعد حدوثها الحادثة A. ويسمى احتمال حدوث احدى الحادثتين بعلاقته مع الحادثة الأخرى

فيه ... ...

$$W(A \cap B) = W(A) \cdot W_A(B)$$

وإذا كانت الحوادث مستقلة فإن

$$W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$$

القيمة الوسطى للمقادير العشوائية :

عندما يكون المقدار العشوائي غير مستمر نكتب

$$\bar{X} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$$

حيث w_i هي احتمالات هذه القيم و x_i هي القيم للمقدار العشوائي غير المستمر .

وعندما يكون المقدار العشوائي مستمر نكتب :

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dW(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

وعندما نأخذ المقدار العشوائي لبعض القيم الممكنة فإن القيمة يعبر عنها على النحو التالي .

بالنسبة للمقدار غير المستمر .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$$

وبالنسبة للمقدار العشوائي المستمر .

$$\bar{X} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x_i f(x) \, dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx}$$

أشهر أنواع التوزيعات الاحصائية .

١- التوزع المنتظم للقيم المنفصلة : لنفرض لدينا مقدار عشوائي ما وإن N هي جميع القيم الممكنة للمقدار العشوائي وبالتالي فإن احتمال حصول أي قيمة عشوائية للمقدار من قيمة واحدة $w = \frac{1}{N}$

مثال : رمي قطعة النرد فإن احتمال الحصول على أي من الاعداد هو $\frac{1}{6}$ وذلك لأن كل القيم الممكنة هي (6) وبالتالي فإن $w = \frac{1}{6}$. ويكون

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = \frac{1}{6} + \dots = 1$$

٢- التوزع المنتظم للقيم المستمرة : وهذا التوزع من أبسط أنواع التوزع ويكتب عادة في مجال محدد $[a, b]$ على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} Const & a \le x \le b \\ 0 & x < a , \; x > b \end{cases}$$

$f(x)$ (رسم بياني: مستطيل بين a و b على المحور x)

...م هذا التابع عند دراسة الكثافة والطاقة

ومقادير مستمرة عشوائية أخرى .

ومنه ... ينظم الى الواحد وذلك للحصول على قيمة الثابت . ٢

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = const \int_a^b dx =$$

$$const\,(b-1)=1$$

وبالتالي فإن قيمة الثابت

$$const = \frac{1}{b-a}$$

٢- التوزيع الأسي : يستخدم هذا التوزيع بشكل واسع ومفاهيمه عند دراسة التفكك للعناصر المشعة وعند دراسة تغير عدد الجسيمات مع الارتفاع . وله الشكل التالي

$$f(x) = const\ e^{-\alpha x} \qquad \text{حيث} \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

ينظم هذا التابع الى الواحد للحصول على قيمة الثابت α .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = const \int_0 e^{-\alpha x}\,dx = \frac{const}{\alpha} = 1$$

ومنه $const = \alpha$. وبالتالي فإن التوزيع الأسي هو .

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & a \leq x < \infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

٤- توزيع برنولي : يعطي هذا التوزيع احتمال الحصول حادثة معينة عدداً كبيراً من المرات ويعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,\bar{n}!}\, p^{n}\, q^{\bar{n}}$$

حيث p - احتمال حدوث الحادثة . q - احتمال عدم حدوث الحادثة .

n - عدد مرات تكرار الحادثة $\bar{n} = N - n$ - عدد المرات التي لا تتكرر فيها الحادثة

$n!, \bar{n}!, N!$ هي الاعداد العاملية - $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$

ويمكن الاستفادة من توزيع برنولي عند دراسة توجه العزوم المغناطيسية بحيث يتجه n عزماً مغناطيسياً نحو الأعلى و $\bar{n}$ عزماً مغناطيسياً نحو الاسفل .

وعندما يكون $p = q = \frac{1}{2}$ نستنتج من توزيع برنولي التوزيع ثنائي الحد . ونعطيه بالصيغة التالية

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N}$$

[illegible] بواسون [illegible] (x) [illegible]

[illegible] بالشكل التالي

$$W(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \qquad \text{عندما } x = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث a ثابت هو معدل القيمة المتوسطة

تابع توزيع غاوص: ويسمى هذا التابع بتابع التوزيع الطبيعي ونصادفه عند دراسة الأخطاء وعند دراسة توزيعات سرعة الجزيئات في الغاز كما ونلقاه عند دراسة الحركة البراونية. ويأخذ الصيغة التالية

$$f(x) = \text{const}\, e^{-\alpha x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

ولتعيين هذا التابع يجب إيجاد قيمة الثابت نعتمد على تكامل بواسون

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \text{const} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

ومنه نستنتج أن $\text{const} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ وبالتالي يصبح تابع التوزيع لغاوص بالشكل التالي

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$